解析汎函数の理論におけるワトソン変換 (フーリェ超函数と偏微分方程式)

吉野, 邦生

数理解析研究所講究録
459巻 1982年 139-151

解析汎函数の理論におけるワトソン変換

上智大 理工　　吉野 邦生

最近，de Roever, Sargos－森本，Zharinov等により，非有界な台を持つ解析汎函数の理論，並びに応用が，研究され，数々の成果を上げつつある。この小文では，波の散乱理論，Regge極理論などで用いられているWatson－Sommerfeld変換を指数型正則函数に対して，定義し，非有界な台を持つ解析汎函数に対して定義されるFourier－Borel変換，並びにAvanissian－Gay変換との関係を調べる。又，これらの間に成り立つ関係を利用することにより，いくつかの応用を見い出すことができる。例えば，昔からよく知られている種々の特殊函数の積分公式に対し，我々の理論から一つの意味付けを行なうことができる。又，Fourier－Borel変換の解析性とAvanissian－Gay変換の漸近展開の間にある関係を調べることもできる。さて，先ず最初にフーリエ・ウルトラ超函数，及び，非有界な台を持つ解析汎函数の定義を与える。

§1. フーリエ・ウルトラ超函数の空間 Q_0' とその部分空間 $Q'(L:K')$

数々の研究者により，様々な表記法が，使用されているが，ここでは，Sargos－森本[7]の表記法を採用することにする。今，Ω を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし，γ を $\mathbb{C}^n$ 上の実数値連続関数とする。この時，

$$H_b(\overline{\Omega}:\gamma)=\{f(z)\in\mathcal{O}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}):\ \sup_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|\cdot e^{-\gamma(z)}<+\infty\}$$

とおく。但し，$\mathcal{O}(\Omega)$，$C(\overline{\Omega})$ は，それぞれ，Ω 上，$\overline{\Omega}$ 上の正則函数，連続函数の空間を表わす。次に，$K, K'\subset\mathbb{R}^n$ をコンパクトな凸集合とし，又，$h_{K'}(x)$ を K' の台函数として，試料関数の空間 Q_0 を次の様に定義する。

$$Q_0=\lim_{\substack{\longleftarrow \\ K,K'\subset\subset\mathbb{R}^n}}\mathrm{proj}\ H_b(\mathbb{R}^n+iK:-h_{K'}(x))$$

Q_0 の双対空間を Q_0' で表わし，Q_0' の元をフーリエ・ウルトラ超函数と呼ぶ。さて，L を $\mathbb{C}$ の凸開集合で，虚軸方向に有界なものとする時，新しい試料関数の空間 $Q(L:K')$ を次の様に定義する。

$$Q(L:K')=\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \varepsilon>0,\ \varepsilon'>0}}\mathrm{ind}\ H_b(\overline{L_\varepsilon}:-h_{K'_\varepsilon}(x)-\varepsilon'|x|)$$

Q_0 と $Q(L:K')$ との間の関係については，最近，Sargos－森本[7]により，次の事実が，証明された。

定理1. Q_0は，$Q(L:k')$の中で点列的に稠密である

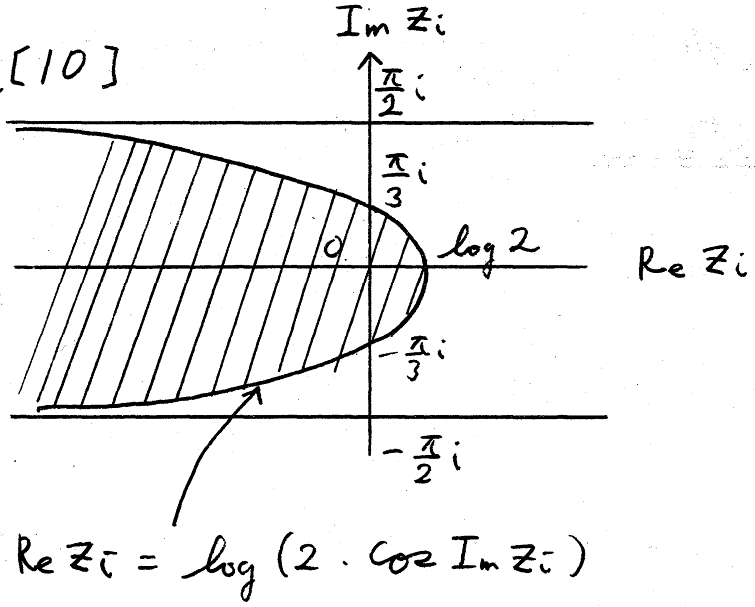
$Q(L:k')$の双対空間を$Q'(L:k')$で表わす時，この定理1により，我々は，$Q'(L:k')$をQ_0'の部分空間と考えることができる。さて，フーリエ・ウルトラ超函数$T \in Q_0'$に対し，$T \in Q'(L:k')$なるL，k'が存在するならば，我々は，TはLにより支えられ，タイプが$h_{k'}$であると言う。ここで，Lの例を幾つか掲げておく。

例1. $L = \mathbb{R}^n + iK$（K：$\mathbb{R}^n$内のコンパクト凸集合）

この型のLに対しては，Zharinovにより，$Q(L:k')$は詳しく調べられている。（但し，彼の記号では，$\Phi(K:k')$と書く）Zharinov [12]を参照のこと。

例2. $L = \prod_{i=1}^{n} L_i$，$L_i = \{z_i \in \mathbb{C} : |\exp z_i - 1| < 1\}$

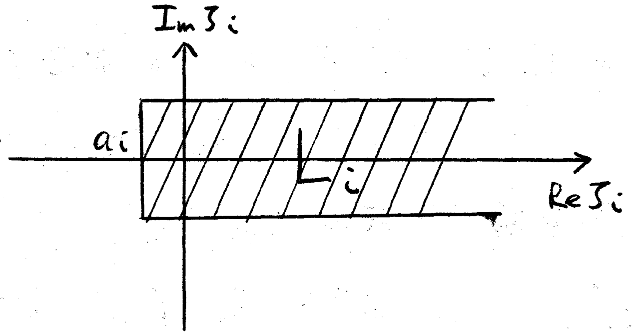
このLは，de Roever [10] Kioustelidias [3] により，指数型正則函数の多項式展開を導びく際に利用されている。



以下，本文では，Lとして次の型のものに限定して考える。

$$L=\prod_{i=1}^{n} L_i \qquad\qquad L_i=[a_i,\infty)+K_i$$

但し，a_iは，実数であり，K_iは，$\mathbb{R}$のコンパクト区間である



$T\in Q'(L;K')$のFourier-Borel変換を次の様に定義する。

$$\hat{T}(z)=\langle T_\zeta,\ e^{\zeta z}\rangle$$

ここで，特に，K'として1点$-(t_1',t_2',\cdots,t_n')$のみからなるものを考える。そして，$-t'+\Pi^+=\{z\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Re}\,z_i<-t_i'\}$とおくと，Fourier-Borel変換は，$Q'(L;-t')$と，$-t'+\Pi^+$上の指数型正則函数の空間$\mathrm{Exp}(-t'+\Pi^+;L)$との間の位相同型（線型）を与える。この事実を定理として述べておこう。

定理2. (Sargos-森本[7]) 次は，位相同型である。

$$Q'(L;-t')\xrightarrow[\text{Borel}]{\text{Fourier}}\mathrm{Exp}(-t'+\Pi^+;L)$$

但し，$\mathrm{Exp}(-t'+\Pi^+;L)=\lim_{\varepsilon>0,\,\varepsilon'>0}\mathrm{proj}\ H_b(-\varepsilon'-t'+\Pi^+;h_{L_\varepsilon}(z))$

次に，$Q'(L;-t')$のAvanissian-Gay変換の定義と性質について述べる。

§ 2. $Q'(L:-k')$ の Avanissian-Gay 変換

$L_j = [a_j, \infty) + iK_j$ の虚軸方向の成分 K_j の幅は，2π 未満とし，$k' = (k'_1, k'_2, \cdots, k'_n)$ の各成分 k'_j は，1未満と仮定する。　$\exp(-L) = \prod_{i=1}^{n} \exp(-L_i)$, $\mathbb{C}^n \# \exp(-L) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{C} \backslash \exp(-L_i)$ とおく。　$w \in \mathbb{C}^n \# \exp(-L)$ であると，関数 $\prod_{i=1}^{n} (1 - w_i e^{\zeta_i})^{-1}$ は $Q(L:-k')$ に属する。この函数を用いて，我々は，$T \in Q'(L:-k')$ の Avanissian-Gay 変換を次の様にして定義する。

$$G_T(w) = \langle T_\zeta, \prod_{i=1}^{n} (1 - w_i e^{\zeta_i})^{-1} \rangle .$$

$G_T(w)$ については，次の事が判っている。(Avanissian-Gay [1] 又は，Sargos-森本 [7] を参照せよ。)

(i) $G_T(w) \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L))$

(ii) $|G_T(w)| \leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'} |w_1|^{-(k'_1+\varepsilon')} \cdots |w_n|^{-(k'_n+\varepsilon')}$

$$(k_i + \varepsilon \leqq |\arg w_i| \leqq \pi)$$

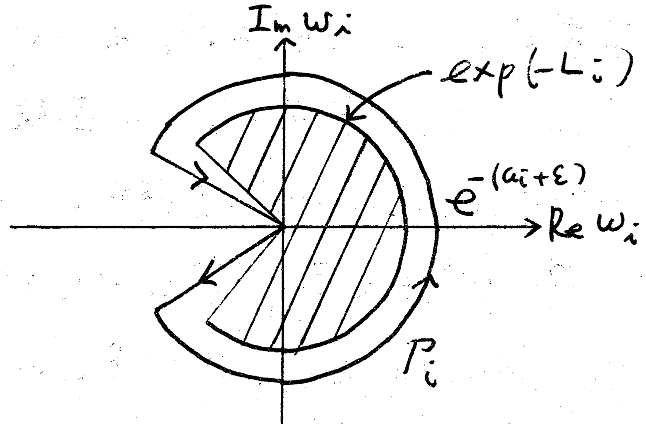
(iii) $G_T(w) = (-1)^n \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \widetilde{T}(-\nu) w^{\nu}$ 　　$(|w_i| > e^{a_i})$

特に，1次元の場合には，上記(iii)は，特殊函数論において重要な意味(例えば，直交多項式の母函数展開に対応している)を持つことが，筆者の計算により判っている。(Yoshino [11])

(i), (ii) の性質を持つ函数の空間を $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L) : -k')$ と表わす事にし，$\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L) : -k')$ の元に対して，Mellin 変換を次の様にして定義する。

$$(2\pi i)^{-1}\int_{P_1\times\cdots\times P_n} g(w_1,w_2,\cdots,w_n)\,w_1^{-z_1-1}\cdots w_n^{-z_n-1}\,dw_1\cdots dw_n$$

但し, $g\in \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n\#\exp(-L):-k')$ であり, 又, P_iは, 次の積分路とする。



以上の定義の下に, 我々は, 次の可換図式を得る。

定理 3. (Avanissian-Gay[1], Sargos-森本[7])

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Exp}(-k'+\Pi^+ : L) & \\
Q'(L;-k') \arrow[u, "\text{Fourier-Borel変換}"] \arrow[r, "\text{Avanissian}", "\text{Gay変換}"'] & \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n\#\exp(-L):k') \arrow[ul, "\text{Mellin変換}"']
\end{tikzcd}$$

勿論, 上の3つの変換は, どれも線型位相同型である。又, この可換図式は, 特殊関数の積分表示式(例えば, Γ-函数のHankel積分表示式, Legendre関数のSchläfli積分表示式など)と密接な関係にあることが, 判っている。これにつ

いては，例えば，森本－吉野［9］，吉野［11］を参照せよ。

§4. $Exp(-b'+\Pi^+ ; L)$ の Watson－Sommerfeld 変換

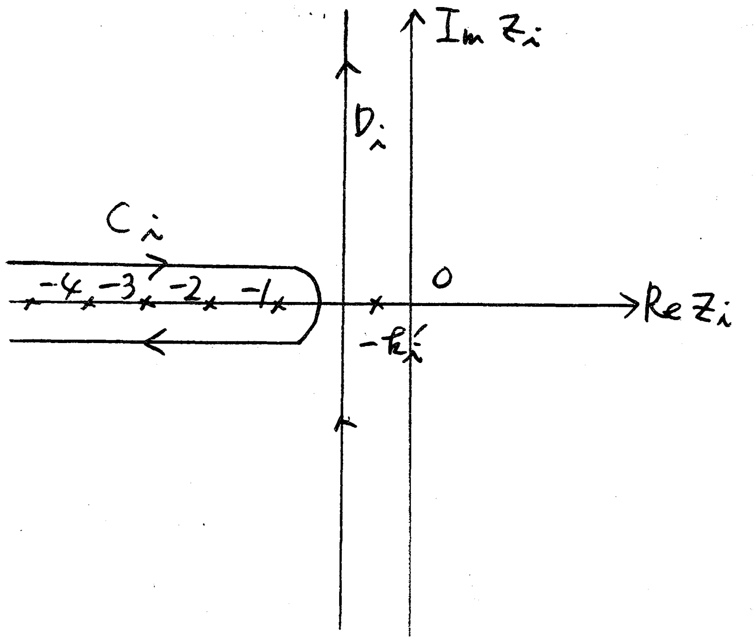
$-b'+\Pi^+$ 上の指数型正則函数 $f(z) \in Exp(-b'+\Pi^+ ; L)$ について，次の積分変換により，Watson－Sommerfeld 変換を定義する。

$$(2\pi i)^{-n} \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} f(z_1, \cdots, z_n) \prod_{i=1}^{n} \frac{(-w_i)^{z_i}}{\sin \pi z_i} dz_1 \cdots dz_n$$

但し，積分路 γ_i の取り方は，次の様にする。

$$\gamma_i = \begin{cases} C_i & |w_i| > e^{-a_i} \text{ の時，} \\ D_i & b_i \leqq |\arg w_i| \leqq \pi \text{ の時，} \end{cases}$$

C_i, D_i, は，次の図の様に決めておく。



留数計算を実行する事により，次の可換図式を得る。

定理4

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Exp}(-\tau'+\pi^{+} : L) \arrow[drr, "\text{Watson-Sommerfeld変換}"] & & \\
& \circlearrowright & \\
Q'(L : -\tau') \arrow[uu, "\text{Fourier Borel 変換}"] \arrow[rr, "\text{Aranissian}", "\text{Gay変換}"'] & & \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L) : \tau')
\end{tikzcd}$$

以下で，定理4の応用を述べることにする。先ず古典的な定積分計算へ応用してみる。

例1. $T \in Q'(L : -\tau')$ として，$a \in L$ に台を持つデルタ函数を考える。この時，$\hat{T}(z) = e^{az}$，$G_T(w) = (1-we^{a})^{-1}$ となる。上の可換図式により，次の有名な，そしてΓ-関数の重要な関数等式を導く際に利用される定積分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \qquad (0 < \mathrm{Re}\, a < 1)$$

を得る。（～～～は，$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ の事を指す。）

次に，2番目の例として，Appell関数（又は，Jonquière関数ともよばれる）の積分表示式を導いてみよう。

例2. $L=[0,\infty)$, $0\leqq k'<1$ とする。$T\in Q'(L:k')$を次の様に定義する。$h\in Q(L:k')$とする。

$$\langle T, h\rangle = (2i\sin(s-1)\pi)^{-1}\int_{\infty}^{(0+)}(-\zeta)^{s-1}h(\zeta)\,d\zeta$$

Γ-関数のHankel積分表示式により，$\hat{T}(z)=\Gamma(s)(-z)^{-s}$,

$$G_T(w) = -\sum_{n=1}^{\infty} w^{-n}n^{-s}\Gamma(s) = F(s, w^{-1})$$

ここで，$F(s, w)$は，通常Appell関数と呼ばれているものである。定理4の可換図式により，次の積分表示式を得る。

$$\frac{-1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{\sin\pi z}\cdot\frac{\Gamma(s)}{(-z)^{s}}(-w)^{z}\,dz = F(s, w^{-1})$$

特に，$w=1$として，

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(-z)^{-s}}{1-e^{-2\pi i z}}\,dz = \zeta(s)$$

を得る。

適当なh函数を設定することにより，Fock-Mehler変換を計算する事ができる。次は，その例である。

例3. $t\geqq 1$とする。Kを第1種完全楕円積分とする。

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\tanh\pi x\cdot P_{-\frac{1}{2}+ix}(t)\,dx = 2\left[t+\sqrt{t^2-1}\right]^{\frac{1}{2}}K\left\{\left[t+\sqrt{t^2-1}\right]^{-1}\right\}$$

次に，解析接続に関する定理への応用を示してみる。

<u>定理5.</u>（Sargos−森本）　級数 $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu w^\nu$ は，0でない収束半径を持つとする。この時，次は，同値である。

(i)　$f(\nu)=a_\nu$ となる $\mathrm{Exp}(-k'+\pi^{+}:L)$ の元 $f(z)$ が，存在する。

(ii)　$\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu w^\nu$ は，$\mathcal{O}_S(\mathbb{C}^n \# \exp(-L):k')$ の元に解析接続できる。

我々は，更に，次の事をも導く事ができる。$n=1$ とする。

<u>定理6.</u>　$T\in Q'(L;-k')$ とする。この時，次は同値である

(i)　$\hat{T}(z)$ は，全平面で有理型で，点 λ_i で，位数 p_i の極を持つ。（左半平面では，指数型正則函数である。）

(ii)　$G_T(w)$ は，扇形領域 $k\leq|\arg w|\leq\pi$ で，次の型の漸近展開を持つ。

$$G_T(w)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{l=1}^{p_i}C^i_l(\log w)^{l}\right\}w^{\lambda_i}$$

例えば，$T\in Q'(L,k')$ を $L=[0,\infty)$，$0\leq k'<1$ として，

$$\langle T,h\rangle=\int_0^\infty \xi^k h(\xi)\,d\xi$$

とおくて，$\hat{T}(z)=\left(-\frac{1}{z}\right)^k\Gamma(k+1)$，$G_T(w)=-\Gamma(k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{-n}}{n^k}$

従がって，$G_T(w)$ は，$G_T(w)\sim\Gamma(k+1)\left\{2\sum_{n=0}^{\frac{k+1}{2}}(-1)^n(1-2^{2n-1})\frac{B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}(\log(-w))^n+(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n^{k+1}}\right\}$ という漸近展開を持つ。

という漸近展開を持つ。最後に，正則函数の一意性に関するCarlsonの定理の一般化が，得られることを一言附け加えておく。(Mellin変換とWatson-Sommerfeld変換は，互いに逆である。)

<u>定理7</u> (Carlsonの定理の一般化)　$f(z) \in \mathrm{Exp}(-\infty' + \pi^{+}; L)$ とする。$f(-\nu)=0$ $(\nu \in \mathbb{N}^n)$であると，$f(z) \equiv 0$.

この定理7は，特に，量子統計力学において重要である。例えば，温度グリーン関数(松原グリーン関数)に関するAbrikosov-Gor'kov-Dzyaloshinskii-Fradkinの定理(温度グリーン関数から2時間グリーン関数が決定されるという内容)の証明において使われる。(詳しいことについては，岩波講座 現代物理学の基礎5　統計物理学　を参照のこと)又，$n=1$の場合，つまりCarlsonの定理が，散乱振幅を複素角運動量平面に解析接続する際に，その一意性を示すために用いられていることは，非常に有名である。(例えば今村[2]を見よ。)更に，Watson-Sommerfeld変換の物理的応用については，Nussenzveig[5]を見られたい。又，少し違う視点からWatson-Sommerfeld変換を考えているものにSargos[6]がある。最後に，話が少し前後するが，定理5の類似物が，Lebeau[4]でもSchwartz超函数を用いて得られており，球面上の超函数の特異性スペクトルの評価に用いられているこ

とを附け加えておく。

参考文献

[1] V. Avanissian and R. Gay : Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entieres de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 341-384.

[2] T. Imamura : 物理と関数論, 岩波書店 1981

[3] J. Kioustelidis : Eine einheitliche methode zur herleitung von reihenentwicklungen fur ganze funktionen von exponentialtyp Compositio Matn. 26 Fasc. 3, (1973) 203-232.

[4] G. Lebeau : Fonctions harmoniques et spectre singulier, Ann. Scient. École. Norm. Sup. t 13 (1980) 269-291.

[5] H, M. Nussenzveig : Causality and Dispersion Relations, Academic Press. New York London 1972.

[6] P. Sargos : Prolongement meromorphe des series de Dirichlet associes des fractions rationnelles de plusieur variables (preprint)

[7] P. Sargos and M. Morimoto : Transformations des fonctionnelles analytiques à porteurs non compacts, Tokyo J. Math. 4 (1981). 457-492.

[8] M. Moromoto and K. Yoshino : A uniqueness theorem for holo holomorphic functions of exponential type, Hokkaido Math. J., 7 (1978) 259-270.

[9] M. Morimoto ans K. Yoshino : Some examples of analytic functionals with carrie at the infinity, Proc. Japan Acad., 56(1980) 357-361

[10] J. W. de Roever : Complex Fourier Transformation and Analytic Functionals with Unbounded Carrier, Mathematisch Centrum, Amsterdam

[11] K. Yoshino : Some examples of analytic functionals and their transformations, to appear in Tokyo J. Math.

[12] V. V. Zharinov : Laplace transformation of Fourier Hyperfunctions and related classes of analytic functionals, Theoret. and Math. Phys., 33(1978) 1027-1039